Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas V (MA-2112)
1^{er} Examen Parcial (50 %)
Abr-Jul 2015
Tipo B

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Pregunta 1.

1. (15 pts.) Dados los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (-1, 4)$, y $f : \mathbf{R^2} \longrightarrow \mathbf{R^2}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y|x| & , \text{si } y \geq (x-1)^2 \\ x^2 y & , \text{si } y < (x-1)^2 \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad de f en A y B.
(b) Estudie la diferenciabilidad de f en A y B.
(c) Calcule, si existe, la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ en A y B.

Resolución.

(a) Graficamos la región definida por $f(x, y)$:

Acá iría el gráfico, si tuviera uno.

Continuidad en el punto A: A pertenece a una región abierta, por lo que existe $B_r(A) \subset (x, y)|y \geq (x-1)^2$. Aquí, $f(x, y) = y|x|$, compuesta por la multiplicación de dos funciones continuas en su dominio, un polinomio y la función valor absoluto.

Por lo tanto, $f(x, y)$ es continua en A.

Continuidad en el punto B: Debido a la ubicación de B, no es posible hallar alguna $B_r(B)$ que esté totalmente contenida en una de las regiones. Por lo tanto, se debe aplicar la definición de continuidad en ambos casos y verificar si se cumple lo siguiente:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow B} \begin{cases} y|x| & , \text{si } y \geq (x-1)^2 \\ x^2 y & , \text{si } y < (x-1)^2 \end{cases} = f(B)$$

Por la definición de f, podemos calcular $f(B) = f(-1, 4) = 4|-1| = 4$.

Para resolver el límite planteado, consideremos una recta tangente a la curva $y = (x-1)^2$ que pase por el punto B y sólo tenga puntos tales que $y < (x-1)^2$. La pendiente de esta recta sería:

$$y' = 2(x-1) \implies m = y'(x_B) = y(-1) = 2(-1-1) = -4$$

La ecuación de las rectas que pasan por B es de la forma:

$$y - y_B = m(x - x_b) \implies y - 4 = m(x+1) \implies y = m(x+1) + 4$$

Con eso, proponemos dos casos en la definición del límite:

Caso (1) cuando $m \neq -4$:

$$\lim_{(x,y=m(x+1)+4)\longrightarrow B} \begin{cases} y|x| & \text{, si } y \geq (x-1)^2 \\ x^2y & \text{, si } y < (x-1)^2 \end{cases} = f(B),\ m \neq -4$$

Caso (2) cuando $m = -4$:

$$\lim_{(x,y=m(x+1)+4)\longrightarrow B} x^2y, \text{ si } y < (x-1)^2 = f(B),\ m = -4$$

Resolviendo el caso (1), con $m \neq -4$:

$$\lim_{(x,y=m(x+1)+4)\longrightarrow B} \begin{cases} y|x| & , y \geq (x-1)^2 \\ x^2y & , y < (x-1)^2 \end{cases} =$$

$$\lim_{(x,y=m(x+1)+4)\longrightarrow B} \begin{cases} (m(x+1)+4)|x| & , x > x_B \\ x^2(m(x+1)+4) & , x < x_B \end{cases} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1} \begin{cases} (m(x+1)+4)|x| & \longrightarrow 4 \\ x^2(m(x+1)+4) & \longrightarrow 4 \end{cases}$$

En este caso, el límite tiende a 4.

Resolviendo el caso (2), con $m = -4$:

$$\lim_{(x,y=m(x+1)+4)\longrightarrow B} x^2y, \text{ si } y < (x-1)^2 =$$

$$\lim_{(x,y=m(x+1)+4)\longrightarrow B} x^2(m(x+1)+4), \text{ si } x < x_B =$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1} x^2(m(x+1)+4) \longrightarrow 4$$

En este caso, el límite también tiende a 4.

Los tres valores posibles de los límites planteados son iguales a $f(B)$; así, lo demostramos. Para ello, acotaremos el límite en: $B_r(B) \equiv \sqrt{((x+1)^2 + (y-4)^2)} < r$.

Por un lado:

$$|f(x,y) - L| = |f(x,y) - 4| = \left| \begin{cases} y|x| - 4 \text{ (I)} \\ x^2y - 4 \text{ (II)} \end{cases} \right|$$

Por otra parte:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 < r^2 \implies$$

$$(x+1)^2 < (x+1)^2 + (y-4)^2 < r^2 \implies$$

$$(x+1)^2 < r^2 \equiv (y-4)^2 < r^2 \implies$$

$$|x+1| < r \equiv |y-4| < r$$

Para resolver el límite, aplicamos los cambios $x = (x+1) - 1$ y $y = (y-4) + 4$.

Para (I):

$$|[(y-4)+4][|(x+1)-1] - 4|$$

Sabemos que:

$$|(x+1) - 1| \leq |x+1| + 1$$

Así, operando y aplicando la desigualdad triangular:

$$|[(y-4)+4][|(x+1)-1] - 4| < |(y-4)|x+1| + 4|x+1| + (y-4) + 4 - 4| =$$
$$|(y-4)|x+1| + 4|x+1| + (y-4)| \leq$$
$$|(y-4)(x+1)| + 4|x+1| + |y-4| <$$
$$r^2 + 4r + 4 = 4^2 + 5r$$

Para (II), de forma similar:

$$|[(x+1)-1]^2[(y-4)+4] - 4| =$$
$$|[(x+1)^2 - 2(x+1) + 1][(y-4)+4] - 4| =$$
$$|(x+1)^2(y-4) - 2(x+1)(y-4) + (y-4) + 4(x+1)^2 - 8(x+1) + 4 - 4| =$$
$$|(x+1)^2(y-4) - 2(x+1)(y-4) + (y-4) + 4(x+1)^2 - 8(x+1)| \leq$$
$$|(x+1)^2(y-4)| + 2|(x+1)(y-4)| + |y-4| + 4|x+1|^2 + 8|x+1| <$$
$$r^3 + 2r^2 + r + 4r^2 + 8r = r^3 + 6r^2 + 9r$$

Con estos dos resultados, podemos ver que:

$$\begin{cases} |y|x| - 4| < r^2 + 5r \\ |x^2 y - 4| < r^3 + 6r^2 + 9r \end{cases}$$

Tomamos el valor más grande, en este caso $r^3 + 6r^2 + 9r$. Así, concluimos:

$$|f(x,y) - L| < r^3 + 6r^2 + 9r = M(r)$$
$$\therefore \text{La función es continua en el punto } B.$$

(b) Estudiamos la diferencialidad de la función en los dos puntos.

Diferenciabilidad de f en A: En $A = (1,2)$, $f(x,y) = y|x|$. Es propiedad de las funciones polinómicas, y de aquellas compuestas por estas, que son continuas y diferenciables en su dominio, en este caso en $\mathbf{R}^2$.

Diferenciabilidad de f en B: En este punto debemos aplicar la definición de diferenciabilidad, y comprobar si se cumple lo siguiente:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow B} \frac{f(x,y) - f(-1,4) - < \nabla f(-1,4), \begin{bmatrix} x+1 \\ y-4 \end{bmatrix} >}{||(x,y) - (-1,4)||} = 0$$

Reescribiendo el denominador:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow B} \frac{f(x,y) - f(-1,4) - < \nabla f(-1,4), \begin{bmatrix} x+1 \\ y-4 \end{bmatrix} >}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}} = 0$$

Calculamos las derivadas parciales en B:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_B + h, y_B) - f(B)}{h} =$$

$$\begin{cases} \text{lím}_{h\longrightarrow 0} \frac{4|-1+h|-4}{h} = \begin{cases} -\infty, \text{ si } h \geq 1 \\ -4, \text{ si } h < 1 \end{cases} \\ \text{lím}_{h\longrightarrow 0} \frac{4(h-1)^2-4}{h} = -8 \end{cases}$$

Los límites son distintos, por lo que $\frac{\delta f}{\delta x}(B)$ no existe, por lo que no existen las derivadas parciales.

$\therefore \nabla f(B)$ no existe, y f no es diferenciable en B.

(c) Estudiamos las derivadas direccionales en ambos puntos:

Derivada direccional en A: Como $f(x,y)$ es diferenciable en A, solo necesitamos obtener las derivadas parciales en este punto:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_B + h, y_B) - f(B)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{2(1+h) - 2}{h} = 2$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_B, y_B + h) - f(B)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(2+h) - 2}{h} = 1$$

Así,

$$\nabla f(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La derivada direccional d_1 vendrá dada por:

$$d_1 =< \nabla f(A), \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} >=< \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} >= \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Derivada direccional en B: Debemos aplicar la definición, dada por el siguiente límite:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(\vec{x}+td_x, \vec{y}+td_y) - f(\vec{x}, \vec{y})}{t}$$

El punto $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, y $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto,

$$B + td = \begin{bmatrix} -1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 4 + \frac{t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Con esto, podemos reescribir $f(B + td)$ de la siguiente manera:

$$f(B+td) = \begin{cases} (4 + \frac{t}{\sqrt{2}})\left| -1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right| & \text{, si } t \geq 0 \\ (-1 - \frac{t}{\sqrt{2}})^2 (4 + \frac{t}{\sqrt{2}}) & \text{, si } t < 0 \end{cases}$$

Tomamos esto, replanteamos y resolvemos el límite anterior:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(B+td) - f(B)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \begin{cases} (4 + \frac{t}{\sqrt{2}})\left| -1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right| & \text{, si } t \geq 0 \\ (-1 - \frac{t}{\sqrt{2}})^2 (4 + \frac{t}{\sqrt{2}}) & \text{, si } t < 0 \end{cases} = \lim_{t \longrightarrow 0} \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} & \text{, si } t \geq 0 \\ \frac{9}{\sqrt{2}} + 3t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}} & \text{, si } t < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Para $t \geq 0$:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(B+td) - f(B)}{t} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Para $t < 0$:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(B+td) - f(B)}{t} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

Como los límites son distintos, la derivada direccional en el punto B no existe.

Pregunta 2.

2. (13 pts.) Sea $G = F \circ h$ con $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1, y $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definida por $h(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z)) = (z \cos x, 2y - z + 8x)$. Halle la ecuacieon del a recta tangente a la curva $F(u, v) = 5$ en el punto $(1, 7)$, sabiendo que $4x + y - 2x = 2$ es la ecuación de plano tangente a la superficie $G(x, y, z) = 5$ en el punto $(0, 4, 1)$.

Resolución.

La ecuación de la recta tangente a la curva $F(u, v) = 5$ en $(1, 7)$ vendrá dada por:

$$< \nabla F(1,7), \begin{bmatrix} u - 1 \\ v - 7 \end{bmatrix} >= 0$$

Como $4x + y - 2z = 2$ es el plano tangente a $G(x, y, z) = 5$ en $(0, 4, 1)$, entonces:

$$\nabla G(0,4,1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = DG(0,4,1)$$

Luego, por regla de la cadena y como F es C^1.

$$DG(0,4,1) = DF(h(0,4,1))Dh(0,4,1)$$

Ahora,

$$h(x,y,z) = \begin{bmatrix} z\cos x \\ 2y - z + 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$h(0,4,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Así,

$$DG(0,4,1) = \nabla F(1,7)Dh(0,4,1)$$

Calculamos $Dh(x, y, z)$:

$$Dh(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z\sin x & 0 & \cos x \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Evaluando en el punto de interés:

$$Dh(0,4,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$DG(0,4,1) = \nabla F(1,7)Dh(0,4,1)$$

$$(4,1,-2) = \nabla F(1,7)\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 8 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$(4,1,-2) = (8\frac{\delta F}{\delta v}(1,7), 2\frac{\delta F}{\delta v}(1,7), \frac{\delta F}{\delta u}(1,7) - \frac{\delta F}{\delta v}(1,7))$$

Igualando cada componente:

$$\begin{cases} 4 = 8\frac{\delta F}{\delta v}(1,7) \\ 1 = 2\frac{\delta F}{\delta v}(1,7) \\ -2 = \frac{\delta F}{\delta u}(1,7) - \frac{\delta F}{\delta v}(1,7) \end{cases}$$

Tras resolver este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{\delta F}{\delta v}(1,7) = \frac{1}{2} \\ \frac{\delta F}{\delta u}(1,7) = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\nabla F(1,7) = (\frac{-3}{2}, \frac{1}{2})$$

Como planteamos al principio, la ecuación de la recta vendrá dada por:

$$< \nabla F(1,7), \begin{bmatrix}u-1\\ v-7\end{bmatrix} >= 0$$

Sustituyendo,

$$< \begin{bmatrix}\frac{-3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}u-1\\ v-7\end{bmatrix} >= 0 \implies$$

$$\frac{-3}{2}(u-1) + \frac{1}{2}(v-7) = 0 \implies$$

$$-3u + 3 + v - 7 = 0 \implies v = 3u = 4$$

Finalmente, la ecuación de la recta tangente a $F(u,v)=5$ en $(1,7)$ es $v-3u-4=0$.

Pregunta 3.

3. (12 pts.) Sean:

$$f(x,y)=\begin{cases} yx^2 & si \quad y\geq x^2 \\ \\ x-y^2 & si \quad y<x^2 \end{cases}$$

$$g(t)=(\frac{t}{2},t-1)$$

$$h(t)=f\circ g$$

a) ¿Es posible utilizar la regla de la cadena para hallar $h'(2)$?

b) Calcule $h'(2)$

Resolución.

a) Sabemos que $h(t)=f(g(t))$

Para poder aplicar la regla de la cadena y calcular $h'(2)$, g debe ser diferenciable en $t=2$ y f debe ser diferenciable en $f(g(2))$

Sea,

$$g(t)=\left(\frac{t}{2},t-1\right)$$

Podemos ver que g es diferenciable en su dominio, ya que está conformada por polinomios y estos son diferenciables en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto g es diferenciable en $t=2$.

Así,

$$g(2)=(1,1)$$

Luego, f diferenciable en $g(2)$ implica que f sea diferenciable en el punto $P(1,1)$

Sea,

$$f(x,y)=\begin{cases} yx^2 & si \quad y\geq x^2 \\ \\ x-y^2 & si \quad y<x^2 \end{cases}$$

En el punto $P(1,1)$ debemos aplicar la definición de diferenciabilidad

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{f(x,y)-f(1,1)-\langle\nabla f(1,1),(x-1,y-1)\rangle}{||(x,y)-(1,1)||}=0$$

Calculamos $\nabla f(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_p+h,y_p)-f(p)}{h}$$

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} & \to 2 \\ \\ \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1-1}{h} & \to -\infty \end{cases}$$

Dado que los límites son distintos, $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ no existe. Por lo tanto, $\nabla f(P)$ no existe y f no es diferenciable en el punto $P(1,1)$ por lo que no se puede aplicar la regla de la cadena.

b. Realizamos la composición

$$h(t) = f \circ g = f\left(x = \frac{t}{2}, y = t-1\right)$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t^3-t^2}{4} & si \quad t-1 \geq \frac{t^2}{4} \\ \\ -t^2 + \frac{5}{2}t - 1 & si \quad t-1 < \frac{t^2}{4} \end{cases}$$

Esto es,

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t^3-t^2}{4} & si \quad t = 2 \\ \\ -t^2 + \frac{5}{2}t - 1 & si \quad t \neq 2 \end{cases}$$

Finalmente,

$$h'(2) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t) - h(2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2 + \frac{5}{2}t - 1 - 1}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} -t + \frac{5}{2} - \frac{2}{t} = -\infty$$

Pregunta 4.

4. (10 pts) Halle los extremos de la función $f(x,y) = 2y^3 + x^4 + x^2y^2 + 8y^2 - 4$

Resolución.

Buscamos los puntos críticos de la función $f(x,y)$ por la relación $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x^3 + 2xy^2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 6y^2 + 2yx^2 + 16y = 0 \tag{2}$$

Luego, de (1) tenemos que,

$$4x^3 + 2xy^2 = 0$$

$$2x(2x^2 + y^2) = 0$$

Así, se obtienen dos ecuaciones

$$2x = 0 \tag{I}$$

$$2x^2 + y^2 = 0 \tag{II}$$

Luego, de (B) tenemos que,

$$6y^2 + 2yx^2 + 16y = 0$$

$$2y(3y + x^2 + 8) = 0$$

Así, se obtienen dos ecuaciones

$$2y = 0 \tag{III}$$

$$3y + x^2 + 8 = 0 \tag{IV}$$

De (1) obtenemos,

$$2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Sustituimos $x = 0$ en (2)

$$6y^2 + 16y = 0 \rightarrow 2y(3y + 8) = 0$$

Así, obtenemos $y_1 = 0$ e $y_2 = -\frac{8}{3}$

Y obtenemos los puntos críticos $A = (0, 0)$ y $B = (0, -\frac{8}{3})$

De (III) obtenemos,

$$2y = 0 \rightarrow y = 0$$

Susituimos en (1)

$$2x(2x^2) = 0 \rightarrow x = 0$$

Volvimos a obtener el punto A.

Luego, de la ecuación (IV) escribimos:

$$3y + x^2 + 8 = 0 \rightarrow y = \frac{-x^2 - 8}{3} \tag{V}$$

Y sustituimos en (1)

$$2x\left(2x^2 + \left(\frac{-x^2 - 8}{3}\right)^2\right) = 0$$

$$2x\left(\frac{2x^2 + x^4 + 64}{9}\right) = 0 \rightarrow x = 0$$

Si susituimos $x = 0$ en (V), volvemos a obtener el punto B.

Entonces, los puntos críticos de $f(x, y)$ son solamente A y B, tal que,

$$A = (0, 0)$$

$$B = (0, -\frac{8}{3})$$

Calculemos ahora la matriz Hessiana de f

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \\ \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \end{pmatrix}$$

Sabemos que,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x^3 + 2xy^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 6y^2 + 2yx^2 + 16y$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,y) = 12x^2 + 2y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = 4xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,y) = 4xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = 12y + 2x^2 + 16$$

Así, la matriz Hessiana de $f(x,y)$ es

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 12y + 2x^2 + 16 \end{pmatrix}$$

Evaluamos $H(x,y)$ en cada punto crítico obtenido y calculamos el determinante

<u>Para $A = (0,0)$</u>

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Como $det(H(0,0)) = 0$ no se puede dar una conclusión sobre el punto A.

<u>Para $B = (0, -\frac{8}{3})$</u>

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{128}{9} & 0 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = -\frac{2048}{9}$$

Como $det(H(0, -\frac{8}{3}) < 0$ podemos afirmar que B es un punto de silla.
Por lo que $f(x,y)$ no tiene extremos relativos.

Este material ha sido creado para gecousb.com.ve

Solución

Joandriz González
Estudiante de Ing. de Materiales
16-10456

Digitalización

Andrés Torres
Estudiante de Ing. de Computación
14-11082

Pablo Garrido
Estudiante de Ing. Electrónica
16-11296

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas a **gecousb@gmail.com**